DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2018.05.016

g-期望的凸性及其应用*

纪荣林[1]，周津名[2]
（1. 安徽大学数学科学学院，安徽 合肥 230601；
2. 合肥师范学院数学与统计学院，安徽 合肥 230601）

摘　要：在倒向随机微分方程生成元满足基本假设的前提下，证明了 g-期望的凸性、条件凸性与倒向随机微分方程生成元函数 g 之间的一一对应关系，从而在 g-期望的框架下说明了 Detlefsen-Scandolo（2005）与 Jiang（2008）中关于动态凸风险度量的两种定义方式是一致的。进一步地，获得了一类时间相容的动态凸风险度量与 g-期望凸性之间的对应关系。

关键词：倒向随机微分方程；g-期望；条件凸性；动态凸风险度量

中图分类号：O211.67　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2018）05－0127－05

Convexity of g-expectations and its application

JI Ronglin[1], *ZHOU Jinming*[2]
(1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei 230601, China)

Abstract: Under the basic assumptions on generators, the one-to-one correspondence between convexity and conditional convexity of g-expectations and generators of backward stochastic differential equations is obtained. Thus it is proved that the definitions of dynamic convex risk measures in Detlefsen-Scandolo (2005) and Jiang (2008) are completely same under the framework of g-expectations. Moreover, the one-to-one relation between time consistent dynamic convex risk measures via g-expectations and convexity of g-expectations is also established.

Key words: backward stochastic differential equation; g-expectation; conditional convexity; dynamic convex risk measure

为了克服金融风险度量方法 VaR 的先天性缺陷，Artzner-Delbaen-Eber-Heath[1-2] 首次通过公理化假设的方法开创性地引入了一致性风险度量的概念，随后 Föllmer-Schied[3] 和 Frittelli-Rosazza Gianin[4] 分别独立地提出凸风险度量的定义，即用条件较弱的凸性取代一致性风险度量公理化体系中的正齐次性和次可加性。Detlefsen-Scandolo[5] 引入了条件凸风险度量的定义，获得了条件凸风险度量可表示的充分必要性条件；进一步地，给出了动态凸风险度量定义并研究其时间相容性条件的等价刻画。关于动态凸风险度量的相关文章请参阅文献［6－9］等。众所周知，这种公理化的风险度量理论与非线性数学期望之间存在着紧密的联系。1997 年，山东大学彭实戈院士通过非线性倒向随机微分方程的解引入了 g-期望和条件 g-期望的概念[10-11]。g-期望是一类典型的域流相容的非线性

* **收稿日期：**2018－01－12
基金项目：江苏省自然科学基金青年基金（BK20150167）；安徽大学博士科研启动经费（J01003202）；安徽省高校自然科学研究（KJ2018A0496）
作者简介：纪荣林（1984 年生），男；**研究方向：**非线性数学期望；E-mail：jironglin@ahu.edu.cn
通信作者：周津名（1982 年生），女；**研究方向：**非线性数学期望；E-mail：zjminguv@163.com

数学期望。Rosazza Gianin[12]将 g-期望理论与公理化的金融风险度量结合起来，通过条件 g-期望诱导出条件凸风险度量，进而通过 g-期望诱导出一类时间相容的动态凸风险度量。Jiang[13]通过应用其所获得的倒向随机微分方程生成元的表示定理，系统性地建立了 g-期望所诱导的（动态）凸风险度量与生成元函数 g 之间的一一对应关系。进一步地，Delbaen-Peng-Rosazza Gianin[14]应用 g-期望所诱导的动态凸风险度量的表示结果给出了一类时间相容的动态凸风险度量（动态凹效用）的表示结果。

需要指出的是，Jiang[13]中动态凸风险度量的公理化假设，特别是在条件凸性假设上，与 Detlefsen-Scandolo[5]是不一致的。由此，一个自然的问题是：在 g-期望的框架下，关于动态凸风险度量的这两种定义方式是否是一致的？在倒向随机微分方程生成元满足基本假设条件的前提下，本文致力于研究 g-期望的凸性、条件凸性与生成元函数 g 之间的一一对应关系，进而证明这两种定义方式在 g-期望框架下是等价的；进一步地，研究了 g-期望与其诱导的时间相容的动态凸风险度量之间的对应关系。

1 预备知识

设 T 是一个给定的正实数，$(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是概率空间 (Ω,F,P) 上的 d-维标准布朗运动，$(F_t)_{t\geqslant 0}$ 是由该布朗运动生成的完备的 σ 域流。对每一个正整数 n，记 $|\cdot|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中 Euclid 范数；对任意的 $z_1,z_2\in\mathbf{R}^n$，记 $z_1\cdot z_2$ 为向量 z_1 与 z_2 的内积；记 $L^2(\Omega,F_t,P)$ 为 F_t – 可测且平方可积的随机变量全体；记 $L^\infty(\Omega,F_t,P)$ 为 F_t – 可测且本性有界的随机变量全体。

考虑如下形式的一维倒向随机微分方程：

$$y_t=\xi+\int_t^T g(s,y_s,z_s)\,\mathrm{d}s-\int_t^T z_s\cdot\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0,T]$$

若生成元函数 $g:[0,T]\times\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ 满足下述假设条件（A1）和（A2）：

（A1）（Lipschitz 条件）存在常数 $K\geqslant 0$ 使得 $\mathrm{d}P\times\mathrm{d}t$-a. s.，对任意的 $(y_1,z_1),(y_2,z_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ 有

$$|g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)|\leqslant K(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)$$

（A2）$E\int_0^T|g(t,0,0)|^2\mathrm{d}t<+\infty$。

（A3）$\mathrm{d}P\times\mathrm{d}t$-a. s.，对任意的 $y\in\mathbf{R}$ 有 $g(t,y,0)=0$。

则由 Pardoux-Peng[10]知，对任意的 $\xi\in L^2(\Omega,F_T,P)$，上述倒向随机微分方程存在唯一一对平方可积的适应解，记为 $(Y_t(g,T,\xi),Z_t(g,T,\xi))_{t\in[0,T]}$。进一步地，若生成元函数 g 还满足假设条件（A3），Peng[11]用 $E_g[\xi]$ 表示 $Y_0(g,T,\xi)$，称 $E_g[\xi]$ 为 ξ 的 g-期望；用 $E_g[\xi|F_t]$ 表示 $Y_t(g,T,\xi)$，并称 $E_g[\xi|F_t]$ 为 ξ 关于 F_t 的条件 g-期望。

接下来，我们引入本文的重要的引理，下述引理来自文献［13］的定理 3.2。

引理 1 设生成元 g 满足（A1）和（A3），则以下陈述等价：

（i）g 独立于 y 且关于 z 是凸的，即对任意的 $z_1,z_2\in\mathbf{R}^d$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$g(t,\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)\leqslant\lambda g(t,z_1)+(1-\lambda)g(t,z_2),\quad \mathrm{d}P\times\mathrm{d}t\text{-a. s.}$$

（ii）对任意的 $X,Y\in L^2(\Omega,F_T,P)$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$E_g[\lambda X+(1-\lambda)Y]\leqslant\lambda E_g[X]+(1-\lambda)E_g[Y]$$

（iii）对任意的 $t\in[0,T]$，$X,Y\in L^2(\Omega,F_T,P)$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$E_g[\lambda X+(1-\lambda)Y|F_t]\leqslant\lambda E_g[X|F_t]+(1-\lambda)E_g[Y|F_t],\ P-a.s.$$

为方便读者起见，我们回顾文献［5］中动态凸风险度量的公理化定义，如下：

定义 1 称 $\rho_{s,t}(\cdot):L^\infty(\Omega,F_t,P)\to L^\infty(\Omega,F_s,P)$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，为条件凸风险度量，若其在 P-a. s. 意义下满足：

（i）单调性：若 $X\geqslant Y$，则 $\rho_{s,t}(X)\leqslant\rho_{s,t}(Y)$。

（ii）平移不变性：对任意的 $Y\in L^\infty(\Omega,F_s,P)$，有 $\rho_{s,t}(X+Y)=\rho_{s,t}(X)-Y$。

（iii）条件凸性：对任意的 $\lambda\in L^\infty(\Omega,F_s,P)$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$\rho_{s,t}(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leqslant\lambda\rho_{s,t}(X)+(1-\lambda)\rho_{s,t}(Y)$$

（iv）标准化：$\rho_{s,t}(0)=0$。

定义 2 称 $(\rho_{s,t})_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ 为动态凸风险度量，若其对任意的 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，$\rho_{s,t}(\cdot)$ 均为条件凸风险度量。进一步地，称动态凸风险度量 $(\rho_{s,t})_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ 是时间相容的，若对任意的 $r\in[s,t]$，$X\in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，有

$$\rho_{s,t}(X)=\rho_{s,r}(-\rho_{r,t}(X))$$

2　主要结果

定理 1　设生成元 g 满足（A1）和（A3），则以下陈述等价：

（i）g 独立于 y 且关于 z 是凸的，即对任意的 $z_1,z_2\in\mathbf{R}^d$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$g(t,\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)\leqslant\lambda g(t,z_1)+(1-\lambda)g(t,z_2),\mathrm{d}P\times\mathrm{d}t\text{-a. s.}$$

（ii）$E_g[\cdot]$ 满足凸性，即对任意的 $X,Y\in L^\infty(\Omega,F_T,P)$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$E_g[\lambda X+(1-\lambda)Y]\leqslant\lambda E_g[X]+(1-\lambda)E_g[Y]$$

（iii）$E_g[\cdot|\ F_t]$ 满足条件凸性，即对任意的 $t\in[0,T]$，$X,Y\in L^\infty(\Omega,F_T,P)$，$\lambda\in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$E_g[\lambda X+(1-\lambda)Y|\ F_t]\leqslant\lambda E_g[X|\ F_t]+(1-\lambda)E_g[Y|\ F_t],\ P-\text{a. s.}$$

证明　（iii）⇒（ii）是显然的。由引理 1 易证（ii）⇒（i）成立。下证（i）⇒（iii）。首先，考虑参数 λ 是简单函数时的情形，即

$$\lambda=\sum_{i=1}^N 1_{A_i}x_i$$

其中，$\{A_i\}_{i=1}^N$ 是 (Ω,F) 的一个分割，$x_i\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,N$。对每一个 i，由假设条件（A3）知

$$g(t,0,0)=0,\qquad \mathrm{d}P\times\mathrm{d}t-\text{a. s.}$$

故对任意的 $(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$，

$$1_{A_i}g(t,y,z)=g(t,1_{A_i}y,1_{A_i}z),i=1,2,\cdots,N$$

对任意的 $X,Y\in L^\infty(\Omega,F_T,P)$，记 (y_t,z_t)，$(\bar{y}_t,\bar{z}_t)$，$(\tilde{y}_t,\tilde{z}_t)$ 分别为下述倒向随机微分方程的解

$$y_t=X+\int_t^T g(s,z_s)\,\mathrm{d}s-\int_t^T z_s\cdot\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0,T],$$

$$\bar{y}_t=Y+\int_t^T g(s,\bar{z}_s)\,\mathrm{d}s-\int_t^T \bar{z}_s\cdot\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0,T],$$

$$\tilde{y}_t=\lambda X+(1-\lambda)Y+\int_t^T g(s,\tilde{z}_s)\,\mathrm{d}s-\int_t^T \tilde{z}_s\cdot\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0,T]$$

注意到对每一个 i，均有

$$1_{A_i}y_t=1_{A_i}X+\int_t^T g(s,1_{A_i}z_s)\,\mathrm{d}s-\int_t^T 1_{A_i}z_s\cdot\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0,T];$$

$$1_{A_i}x_iy_t=1_{A_i}x_iX+\int_t^T x_ig(s,1_{A_i}z_s)\,\mathrm{d}s-\int_t^T 1_{A_i}x_iz_s\cdot\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0,T]$$

从而

$$\begin{aligned}\lambda y_t&=\sum_{i=1}^N 1_{A_i}X+\sum_{i=1}^N\int_t^T x_ig(s,1_{A_i}z_s)\,\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^N\int_t^T 1_{A_i}x_iz_s\cdot\mathrm{d}B_s=\\&\lambda X+\int_t^T\sum_{i=1}^N x_ig(s,1_{A_i}z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T\sum_{i=1}^N 1_{A_i}x_iz_s\cdot\mathrm{d}B_s=\\&\lambda X+\int_t^T\sum_{i=1}^N x_ig(s,1_{A_i}z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T\lambda z_s\cdot\mathrm{d}B_s\end{aligned}$$

类似可得

$$(1-\lambda)\bar{y}_t=(1-\lambda)Y+\int_t^T\sum_{i=1}^N(1-x_i)g(s,1_{A_i}\bar{z}_s)\mathrm{d}s-\int_t^T(1-\lambda)\bar{z}_s\cdot\mathrm{d}B_s$$

令 $Y_t=\lambda y_t+(1-\lambda)\bar{y}_t$，则

$$Y_t=\lambda X+(1-\lambda)Y+\int_t^T\sum_{i=1}^N(x_ig(s,1_{A_i}z_s)+(1-x_i)g(s,1_{A_i}\bar{z}_s))\,\mathrm{d}s-\int_t^T\lambda z_s+(1-\lambda)\bar{z}_s\cdot\mathrm{d}B_s$$

对每一个 $i=1,2,\cdots,N$，注意到 g 是独立于 y 且关于 z 是凸的，结合 $x_i\in[0,1]$，可得

$$g(t,x_iz_t+(1-x_i)\bar{z}_t)\leqslant x_ig(t,z_t)+(1-x_i)g(t,\bar{z}_t),\mathrm{d}P\times\mathrm{d}t-\text{a. s.}$$

由 g-期望的定义及倒向随机微分方程的比较定理立得

$$\begin{aligned}E_g[\lambda X+(1-\lambda)Y|\ F_t]&=\tilde{y}_t\leqslant Y_t=\\ \lambda y_t+(1-\lambda)\bar{y}_t&=\\ \lambda E_g[X|\ F_t]&+(1-\lambda)E_g[Y|\ F_t]\end{aligned}$$

接下来，考虑一般情形下的参数 λ。对任意的 $\lambda\in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，$\lambda\in[0,1]$，选取 $L^\infty(\Omega,F_t,P)$ 中收敛于 λ 的简单函数列 $\{\lambda_i\}$，其中对每一 i，$\lambda_i\in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，$\lambda_i\in[0,1]$。由倒向随机微分方程解的连续依赖性（参阅 Peng[11]）知

$$\begin{aligned}&E_P[|\ E_g[\lambda_iX+(1-\lambda_i)Y|\ F_t]-\\&E_g[\lambda X+(1-\lambda)Y|\ F_t]|^2]\leqslant\\&C_{T,K}E_P[|\ (\lambda_i-\lambda)(X-Y)|^2]\to 0\end{aligned}$$

其中，$C_{T,K}$ 为仅依赖于 T，K 的非负常数。故对任意的 $t\in[0,\ \mathrm{T}]$，$X,Y\in L^\infty(\Omega,F_T,P)$，$\lambda\in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$E_g[\lambda X+(1-\lambda)Y|\ F_t]\leqslant\lambda E_g[X|\ F_t]+(1-\lambda)E_g[Y|\ F_t],\ P-\text{a. s.}$$

证毕。

易验证，对任意的 $X,Y\in L^2(\Omega,F_T,P)$，定理

1 中的论断依然成立，结合引理 1 立得下述命题，从而说明在 g-期望的框架下，Jiang[13] 中动态凸风险度量的公理化假设与 Detlefsen-Scandolo[5] 是完全一致的。

命题 1 设生成元 g 满足（A1）和（A3），则以下陈述等价：

（i）$E_g[\cdot]$ 是凸 g-期望，即对任意的 $X,Y \in L^2(\Omega,F_T,P)$，$\lambda \in [0,1]$，有

$$E_g[\lambda X + (1-\lambda)Y] \leqslant \lambda E_g[X] + (1-\lambda)E_g[Y]$$

（ii）$E_g[\cdot | F_t]$ 满足条件凸性，即对任意的 $t \in [0, T]$，$X,Y \in L^2(\Omega,F_T,P)$，$\lambda \in L^2(\Omega,F_t,P)$，$\lambda \in [0,1]$，有

$$E_g[\lambda X + (1-\lambda)Y | F_t] \leqslant \lambda E_g[X | F_t] + (1-\lambda)E_g[Y | F_t], P-\text{a.s.}$$

接下来，我们探讨 g-期望与其诱导的时间相容的动态凸风险度量之间的对应关系。

定理 2 设生成元 g 满足（A1）和（A3）。对任意的 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$，令

$$\rho_{s,t}(X) = E_g[-X | F_s], \qquad X \in L^\infty(\Omega,F_t,P)$$

则以下陈述等价：

（i）$E_g[\cdot]$ 是凸 g-期望。

（ii）$(\rho_{s,t})_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ 是时间相容的动态凸风险度量，且对任意的 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$，$\rho_{s,t}$ 满足从上连续性，即若 $X_n \downarrow X$，$P-$a. s.，则 $\rho_{s,t}(X_n) \uparrow \rho_{s,t}(X)$，$P-$a. s.

证明 首先，我们证明（ii）$\Rightarrow$（i）成立。事实上，由 $(\rho_{s,t})_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ 是动态凸风险度量知，对任意的 $t \in [0, T]$，$\rho_{t,T}$ 为条件凸风险度量。特别地，$\rho_{0,T}$ 为凸风险度量。从而由凸风险度量的公理化定义知，对任意的 $X,Y \in L^\infty(\Omega,F_T,P)$，$\lambda \in [0,1]$，有

$$\rho_{0,T}(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\rho_{0,T}(X) + (1-\lambda)\rho_{0,T}(Y)$$

结合 $\rho_{0,T}(X) = E_g[-X | F_0] = E_g[-X]$，$\forall X \in L^\infty(\Omega,F_T,P)$，得

$$E_g[\lambda(-X) + (1-\lambda)(-Y)] \leqslant \lambda E_g[-X] + (1-\lambda)E_g[-Y], \quad \forall X,Y \in L^\infty(\Omega,F_T,P)$$

即 $E_g[\cdot]$ 是凸 g-期望。

下证（i）$\Rightarrow$（ii）成立。对任意的 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$，由定理 1 知生成元 g 独立于 y 且关于 z 是凸的，且条件 g-期望 $E_g[\cdot | F_s]$ 满足条件凸性。进一步地，结合倒向随机微分方程的比较定理、解的存在唯一性，Peng[11] g-期望的平移不变性、保常数性、连续依赖性等，可知 $E_g[\cdot | F_s]$ 在 $P-$a. s. 意义下满足下述性质：

（a）对任意的 $X,Y \in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，若 $X \geqslant Y$，则 $E_g[X | F_s] \geqslant E_g[Y | F_s]$。

（b）对任意的 $X \in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，$Y \in L^\infty(\Omega,F_s,P)$，有

$$E_g[X + Y | F_s] = E_g[X | F_s] + Y$$

（c）对任意的 $X \in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，$Y \in L^\infty(\Omega,F_s,P)$，$\lambda \in [0,1]$，有

$$E_g[\lambda X + (1-\lambda)Y | F_s] \leqslant \lambda E_g[X | F_s] + (1-\lambda)E_g[Y | F_s], P-\text{a.s.}$$

（d）$E_g[0 | F_s] = 0$。

（e）对任意的 $X \in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，$r \in [s, t]$，有

$$E_g[E_g[X | F_r] | F_s] = E_g[X | F_{r\wedge s}] = E_g[X | F_r]$$

（f）若 $X_n,X \in L^\infty(\Omega,F_t,P)$ 且 $X_n \to X$，则 $E_g[X_n | F_s] \to E_g[X | F_s]$。

由 $\rho_{s,t}(X) = E_g[-X | F_s], X \in L^\infty(\Omega,F_t,P)$，结合性质（a）–（d）可知 $\rho_{s,t}$ 为条件凸风险度量，且由性质（a）和（f）得，条件凸风险度量 $\rho_{s,t}$ 满足从上连续性。进一步地，由时间参数 s 和 t 选取的任意性知，$(\rho_{s,t})_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ 是动态凸风险度量，从而由性质（e）立得 $(\rho_{s,t})_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ 是时间相容的动态凸风险度量。证毕。

参考文献：

［1］ ARTZNER P H, DELBAEN F, EBER J M, et al. Thinking coherently［J］. Risk, 1997, 10: 71－86.

［2］ ARTZNER P H, DELBAEN F, EBER J M, et al. Coherent measures of risk［J］. Mathematical Finance, 1999, 4: 203－228.

［3］ FÖLLMER H, SCHIED A. Convex measures of risk and trading constraints［J］. Finance and Stochastics, 2002, 6: 429－447.

［4］ FRIRRELLI M, ROSAZZA G E. Putting order in risk measures［J］. Journal of Banking and Finance, 2002, 26: 1473－1486.

［5］ DETLEFSEN K, SCANDOLO G. Conditional and dynamic convex risk measures [J]. Finance and Stochastics, 2005, 9: 539 –561.

[6] CHERIDITO P, DELBAEN F, KUPPER M. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete time processes [J]. Electronic Journal of Probability, 2006, 11: 57 –106.

[7] FÖLLMER H, PENNER I. Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions [J]. Statistics Decisions, 2006, 24: 61 –96.

[8] KLÖPPEL S, SCHWEIZER M. Dynamic indifference valuation via convex risk measures [J]. Mathematical Finance, 2007, 17: 599 –627.

[9] BION – NADAL J. Time consistent dynamic risk processes [J]. Stochastic Process and Their Application, 2009, 119: 633 –654.

[10] PARDOUX E, PENG S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation [J]. Systems Control Letters, 1990, 14: 55 –61.

[11] PENG S G. Backward SDE and related g-expectation [J]. Backward Stochastic Differential Equations, 1997, 364: 141-159.

[12] ROSAZZA G E. Risk measures via g-expectations [J]. Insurance: Mathematics and Economics 2006, 39, 19 –34.

[13] JIANG L. Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures [J]. Annals of Applied Probability, 2008, 18: 245 –258.

[14] DELBAEN F, PENG S G, ROSAZZA G E. Representation of the penalty term of dynamic concave utilities [J]. Finance and Stochastics, 2010, 14: 449 –427.

[15] 纪荣林,江龙,石学军. 凸 g-期望的若干性质[J]. 中山大学学报(自然科学版),2015, 54 (5): 11 –14.
JI R L, JIANG L, SHI X J. Some properties of convex g-expectations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54 (5): 11 –14.

[16] 纪荣林,周津名. 关于凸期望的极小元的一些结果[J]. 中山大学学报(自然科学版),2017, 56 (6): 72 –75.
JI R L, ZHOU J M. Some results on the minimal members of convex expectations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2017, 56(6): 72 –75.